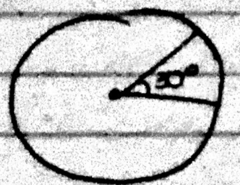
20/10/16

Παράδειγμα Ομάδας με άπειρη τάξη που όλα τα στοιχεία της έχουν πεπερ. τάξη

$S^1 =$  $\leq \mathbb{C}^*$

Γράφω τον κύκλο σαν πολλαπλασιαστική ομάδα

$$\{e^{2\pi i t} \mid t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow |e^{2\pi i t}| = 1$$

$$e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)$$

$$e^{2\pi i t} e^{2\pi i t'} = e^{2\pi i (t+t')}$$

$$e^{2\pi i t} = e^{2\pi i (t+k)} = e^{k 2\pi i} e^{2\pi i t}$$

Άρα

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\} \quad , z = e^{2\pi i t} = \cos 2\pi i t + i \sin 2\pi i t$$

$$\Rightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\} = \{e^{2\pi i t} / t \in \mathbb{R}\} = \{e^{2\pi i t} / 0 \leq t \leq 1\}$$

Στο παράδειγμα μας

$$S^1 = \{e^{2\pi i t} / t \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

$$e^{2\pi i t} \cdot e^{2\pi i t'} = e^{2\pi i (t+t')}$$

Ουσιαστικά κολλάω το —— $-1 \quad 0 \quad 1$ —— $0 = 1 = 1$

άρα κλείνω την ευθεία και έτσι φαίνεται ο κύκλος

$\mathbb{Z} \le \mathbb{Q} \le (\mathbb{R},+)$

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \le \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Υποομάδα της $S^1 = \{e^{2\pi i t} \mid t \in \mathbb{Q}\}$

$t = p/q \quad (p,q)=1 \quad , q \neq 0$

Άρα ο κύκλος δε θα έχει όλες τις γωνίες, αλλά μόνο αυτές που αντιστοιχούν στους ρητούς

$D_n = \{$συμμετρίες ενός κανονικού ν-γώνου$\}$
D_n ομάδα $|D_n| = 2n$ (n-στροφές και n-συμμετρίες)

Απόδειξη

Έστω n περιττός
Αν μια μεσοκάθετος είναι άξονας συμμετρίας
⇒ Όσες κορυφές είναι δεξιά είναι και από αριστερά

Γίνεται μόνο αν μια κορυφή βρίσκεται πάνω στον άξονα ⇒ $\exists$ n άξονες όσες οι κορυφές

$$10\mathbb{Z}/_{10\mathbb{Z}} \le \mathbb{Z}/_{10\mathbb{Z}}$$
$$= \mathbb{Z} \bmod 10$$

Έστω n άρτιος
Όπως προηγουμένως όσες κορυφές βρίσκονται και αριστερά.

Αν ο αξονας που περιεχει μια κορυφη $\Rightarrow$ εχει και αλλη μια.

Αυτα ειναι $\frac{n}{2}$

Αν δεν περιεχει κορυφη, θα ειναι μεσοκαθετος σε καποια πλευρα και αντιστοιχει της. Υπαρχουν $\frac{n}{2}$ τετοια ζευγη.

Προταση

$$D_n = 2n$$

Αποδειξη

Οι συμμετριες ειναι ισομετριες που διατηρουν το σχημα. Συμφωνα με το λημμα καθε σημειο καθοριζεται απο τις αποστασεις της απο δυο διαδοχικες κορυφες. Αρα η ισομετρια καθοριζεται απο διαδοχικες κορυφες.

Ποσες ειναι?

Για την πρωτη κορυφη εχουμε n επιλογες και για τη δευτερη 2. Αρα εχουμε το πολυ $2n$ επιλογες. $\Rightarrow |D_n| \leq 2n \Rightarrow |D_n| = 2n$

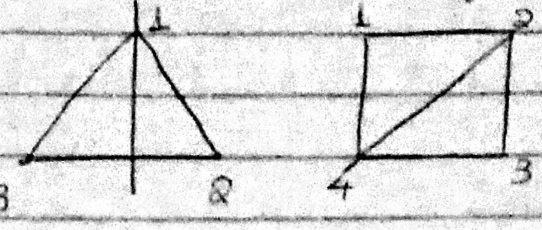
Γεννητορες

Γεννημα εχουμε $\langle a, b \rangle$. $abab \neq a^3 b^3$

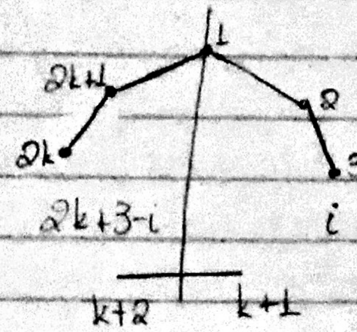
1) f: στροφη κατα $\frac{2\pi}{n}$

2) g συμμετρία από την κορυφή 1.

πχ



$n = 2k+1$



$$\boxed{gf^ig = f^{-i}} = 1f^{-i} = f^{2k+1}f^{-i} = f^{2k+1-i}$$

Απόδειξη

Έστω l τυχαία ακολουθία

Πρέπει ν.δ.ο οι δυο ισομετρίες gf^ig και f^{2k+1-i} έχουν την ίδια εικόνα στην τυχαία κορυφή.

$$f^{2k+1-i}(l) = (l+2k+1-i) \bmod n$$

$$f(l) = (l+1) \bmod n$$

$$= (l-i) \bmod n$$

$$gf^ig(l)$$

$$g(l) = (2k+3-l) \bmod n = (2-l) \bmod n$$

$$f^i(g(l)) = f^i(2-l) = (2-l+i) \bmod n$$

$$g(f^ig(l)) = g(2-l+i) = 2k+3-(2-l+1) \bmod n$$

$$2k+3-2+l-i \equiv (l-i) \bmod n$$

Έστωσαν $f^n=1$, $g^2=1$

$$D_n=\{1, f, f^2, \dots, f^{n-1}, \underbrace{g, fg, f^2g, \dots, f^{n-1}g}_{\text{συμμετρίες}}\}$$

$n=2k+1$

$$f^i g = f^j g \Rightarrow f^i = f^j \quad {}_{i\neq j}$$

$$f^i g = f^k, \; i \geq k \Rightarrow f^{i-k} g = 1 \Rightarrow$$

$$g = f^{k-i} \rightarrow \text{Δεν έχει σταθερή.}$$

Έχει την 1 κορυφή σταθερή.

Άρα

αδύνατο.

Άρα αναπαριστώ την ομάδα:

$$\langle f, g\rangle / f^n = 1 = g^2 \text{ και } g f^i g = f^{-i} = f^{n-i}$$

Άσκηση

Θα κάνετε το ίδιο για $n=2k$

Άσκηση 8

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; a, b, \gamma \in \mathbb{Z}_p, \; p>2 \text{ πρώτος} \right\}$$

$$|G| = p \, p \, p = p^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & kb + \left(\frac{(k-1)k}{2}\right) a\gamma \\ & 1 & k\gamma \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

για $k = p \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 + p(\;) a\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Υποομάδα

G: ομάδα $\emptyset \neq Y \subseteq G$ θέλουμε υποομάδα με την ίδια πράξη $\Leftrightarrow$

α) πράξη κλειστή στο Y

b) $\forall \alpha \in Y \Rightarrow \alpha^{-1} \in Y$

πχ

Y: κλειστή πράξη, όχι υποομάδα $\leq G$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

Ορισμός

G: ομάδα και $Z(G) = \{a \in G$ με $ab = ba \; \forall b \in G\}$

$1 \in Z(G) \neq \emptyset$ (κεντρική υποομάδα)

Πρόταση

1) $Z(G) \leq G$

2) a) $a, b \in Z(G) \Rightarrow$ θέλουμε $ab\gamma = \gamma ab \; \forall \gamma \in G$

$a(b\gamma) = a(\gamma b) = \gamma(ab)$

b) $a \in Z(G) \Rightarrow a^{-1} \in Z(G)$

Πρέπει $a^{-1}g = ga^{-1} \ \forall g \in G$

$(a^{-1}g)^{-1} = (ga^{-1})^{-1} \Leftrightarrow g^{-1}a = ag^{-1}$

Παρε $g^{-1} \in G$

Πρόταση

$Z(G) = G \Leftrightarrow G$: αβελιανή

Πχ

$$Z(GL(2,\mathbb{R})) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & a \end{pmatrix} \middle| \ a \in \mathbb{R}^* \right\} \cong \mathbb{R}^*$$

Θεώρημα

Έστω $G = \langle a \rangle$ με $o(a) = \nu$

1) Αν $H \le G$, τότε $|H| / \nu$ και αν $\mu / \nu \Rightarrow \exists H \le G$ με $|H| = \mu$.

2) Αν $\nu = km$, τότε η G έχει μοναδική υποομάδα τάξης μ.

3) $\langle a^{\tau} \rangle = \langle a^{\upsilon} \rangle \Leftrightarrow (\tau, \nu) = (\upsilon, \nu)$

δεν είναι απαραίτητα ίσα

Απόδειξη

1) $H \le G \Rightarrow \exists a^k \in H$ και k ελάχιστος

$H \supseteq \langle a^k \rangle$

$a^m = a^{\pi k} a^{\upsilon} \quad m = \pi k + \upsilon \quad 0 \le \upsilon \le k-1$

$a^{\upsilon} \in H \quad \upsilon < k$

2) $k | \nu \qquad Y = \langle a^{k/\nu} \rangle$

3) $o(a^{\tau}) = |\langle a^{\tau} \rangle| = \dfrac{\nu}{(\nu,\tau)} = \dfrac{\nu}{(\nu,u)}$

Πόρισμα

Αν $G = \langle a \rangle$ και $|G| < +\infty$.
Τότε $\forall$ διαιρέτη της $|G|$ υπάρχει μοναδική υποομάδα.

Πόρισμα

Αν $G = \langle a \rangle$ και $|G| = +\infty$ τότε κάθε $a^k \in G$ δημιουργεί μια διαφορετική υποομάδα $\forall\, k \in \mathbb{N}$

Πόρισμα

$k\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$

Homework

1η άσκηση στις υποομάδες
3η ——//——
4η